ZESTAW VI

(1) Mówimy, że zbiór zwarty $C \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ między punktami $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus C$, jeśli a i b leżą w różnych składowych zbioru $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Pokazać, że zbiór zwarty $C \subset \mathbb{R}^n$ rozcina $\mathbb{R}^n$ między $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi_a|C : C \to S^{n-1}$ i $\pi_b|C : C \to S^{n-1}$ nie są homotopijne.

<u>Wskazówka</u>. Przypuścić, że a i b leżą w różnych składowych U i V zbioru $\mathbb{R}^n \setminus C$ i wywnioskować z twierdzenia Borsuka o przedłużaniu homotopii, że z warunku $\pi_a|C \simeq \pi_b|C$ wynikałoby istnienie ciągłego przedłużenia $\pi_a|C$ na $\overline{U}$ oraz $\pi_b|C$ na $\overline{V}$, o wartościach w S^{n-1}.

(2) (A) Wykazać, że jeśli $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym i $f : K \to S^1$ jest przekształceniem ciągłym homotopijnym z przekształceniem stałym, to istnieje ciągłe przekształcenie $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ takie, że $f = E \circ \tilde{f}$.

(B) Korzystając z (A) pokazać, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^n$ są zwarte, przecięcie $A \cap B$ jest spójne i $f : A \cup B \to S^1$ jest przekształceniem ciągłym takim, że oba obcięcia $f|A : A \to S^1$ oraz $f|B : B \to S^1$ są homotopijne z przekształceniem stałym, to f też jest homotopijne z przekształceniem stałym.

3 (A) Niech $f, g : K \to S^1$ będą przekształceniami homotopijnymi. Pokazać, że iloraz $\frac{f}{g} : K \to S^1$ jest homotopijny z przekształceniem stałym.

(B) Udowodnić twierdzenie Janiszewskiego: jeśli $A, B \subset \mathbb{R}^2$ są zbiorami zwartymi o spójnym przecięciu, $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$ i żaden ze zbiorów A, B nie rozcina $\mathbb{R}^n$ między a i b (zob. Zadanie 1), to także $A \cup B$ nie rozcina $\mathbb{R}^n$ między a i b.

Wskazówka. Rozpatrzyć $\frac{\pi_a | A \cup B}{\pi_b | A \cup B} : A \cup B \to S^1$ i skorzystać z (A), Zadania 1 oraz Zadania 2 (B).

(C) Pokazać, że dla $n \geq 2$ każde przekształcenie ciągłe $f : S^n \to S^1$ jest homotopijne z przekształceniem stałym.

(D) Wykazać, że dla $n \geq 2$ sfera S^n jest jednosprzęgła: jeśli $S^n = A \cup B$ i A, B są zwarte i spójne, to przecięcie $A \cap B$ jest spójne.

Wskazówka. Założyć przeciwnie, że $A \cap B = C \cup D$, gdzie C, D są rozłącznymi, niepustymi, zbiorami zwartymi, określić funkcję ciągłą $f : A \cup B \to S^1$ taką, że $f|C \equiv 1$, $f|D \equiv -1$, $f(A) \subset \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $f(B) \subset \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ i korzystając z Zadania 2 (A) wyprowadzić sprzeczność z (C), pokazując, że f nie jest homotopijne z przekształceniem stałym.

4. Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym, niepustym zbiorem spójnym, $W \neq \mathbb{R}^n$ i niech U będzie składową zbioru $\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}$.

(A) Pokazać, że dla każdego $p \in \overline{U} \setminus U$, zbiór $U \cup W \cup \{p\}$ jest spójny.

Wskazówka. Sprawdzić, że $\overline{U} \setminus U \subset \overline{W} \setminus W$.

(B) Wykazać, że $\overline{U} \setminus U$ jest zbiorem spójnym.

Wskazówka. Wybrać $a \in U$, $b \in W$ i zauważyć, że $C = \overline{U} \setminus U$ rozcina $\mathbb{R}^n$ między a i b (zob. Zad. 1), ale żaden właściwy podzbiór C nie rozcina $\mathbb{R}^n$ między a i b, zob. (A), a następnie odwołać się do Zadania 1.

5. Niech $n \geq 2$

(A) Wykazać, że dla każdej pętli $f: S^1 \to S^n$ istnieje homotopijna z nią pętla $g: S^1 \to S^n$ taka, że $g(S^1) \neq S^n$.

Wskazówka. Wybrać $z_1, \dots, z_m$ na S^1 tak, że obraz przy f łuku L_i łączącego z_i z z_{i+1} ($z_{m+1} = z_1$) na okręgu S^1 leży w pewnej otwartej półprzestrzeni $H_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wyznaczonej przez hiperpłaszczyznę przechodzącą przez zero i określić $g: S^1 \to S^n$ tak, że $g(L_i)$ leży na części łuku wielkiego na S^n łączącego $f(z_i)$ oraz $f(z_{i+1})$, zawartej w H_i. Sprawdzić, że $d_{sup}(f, g) < 2$.

(B) Wykazać, że każda pętla $f: S^1 \to S^n$ jest homotopijna z pętlą stałą.

Wskazówka. Sprawdzić to dla pętli g opisanej w (A).

4

6

Niech $f : S^1 \to S^1$ będzie funkcją ciągłą.

(A) Wykazać, że jeśli f jest homotopijna z funkcją stałą, to istnieje funkcja ciągła $g : S^1 \to S^1$ taka, że $g^2 = f$ (gdzie $g^2(z) = g(z)g(z)$ dla $z \in S^1$).

Wskazówka. Powtarzając rozumowanie z uzasadnienia 6.2.6 pokazać, że pętla $\alpha = (f \circ \omega_1)/f(1)$ jest homotopijna z pętlą stałą. Z 6.2.4 wywnioskować, że $\deg\alpha = 0$, więc droga $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ spełniająca warunki $E \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ i $\tilde{\alpha}(0) = 0$ jest pętlą. Określić ciągłe $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ takie, że $f = E \circ \varphi$ i rozważyć $g = E \circ \frac{1}{2}\varphi$.

(B) Wykazać, że jeśli f spełnia warunek $f(-z) = -f(z)$ dla $z \in S^1$, to f nie jest homotopijna z funkcją stałą.

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozpatrzyć funkcje ciągłe $g, h : S^1 \to S^1$ takie, że $g^2 = f$, a $h(z) = \frac{g(-z)}{g(z)}$ dla $z \in S^1$. Z $h^2(z) = \frac{f(-z)}{f(z)} = -1$ wywnioskować, że h jest funkcją stałą i $h(1)h(-1) = h(1)h(1) = -1$. Obliczyć $h(1)h(-1)$ korzystając z definicji funkcji h.

7

(A) Niech $F : S^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x \in S^2$ takie, że $F(x) = F(-x)$ (twierdzenie Borsuka–Ulama dla sfery S^2).

Wskazówka. Założyć przeciwnie i rozważyć funkcję $h : S^2_+ \to S^1$ określoną wzorem $h(x) = \frac{F(x)-F(-x)}{||F(x)-F(-x)||}$, gdzie S^2_+ oznacza górną domkniętą połowę sfery S^2 ograniczoną okręgiem jednostkowym $\partial S^2_+ = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. Sprawdzić, że obcięcie $f = h|\partial S^2_+$ spełnia warunek $f(-x) = -f(x)$ i jest homotopijne z funkcją stałą. Wyprowadzić sprzeczność z poprzedniego zadania.

(B) Nech A_1, A_2, A_3 będą domkniętymi podzbiorami sfery S^2. Wykazać, ze jeśli S^2 jest sumą tych zbiorów, to istnieje $x \in S^2$ takie, że jeden z tych zbiorów zawiera x i $-x$.

Wskazówka. Założyć, że A_j jest rozłączny z $B_j = \{-x : x \in A_j\}$ dla $j = 1, 2$ i rozważyć funkcje $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ określone wzorem $f_j(x) = \frac{d_{A_j}(x) - d_{B_j}(x)}{d_{A_j}(x) + d_{B_j}(x)}$. Korzystając z (A) znaleźć $x \in S^2$ takie, że $f_j(x) = f_j(-x)$ dla $j = 1, 2$ i pokazać, że $x \notin A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$.

8

Niech $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$, zaś $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.

(A) Wskazać homeomorfizm $D^2/S^1 \simeq S^2$.

(B) Wykazać, że D^n/S^{n-1} jest przestrzenią homeomorficzną z S^n.

9

Niech C będzie zbiorem Cantora w $[0,1]$, $0,1 \in C$ i $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Pokazać, że przestrzenie $[0,1]/C$ i $[0,1]/A$ są homeomorficzne.

10

Butelką Kleina nazywa się przestrzeń $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$, gdzie różne punkty (x,y), (x',y') są w relacji $\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| = 1$ i $(x',y') = -(x,y)$, lub $|y| = 1$ i $x = x'$.

Pokazać, że butelka Kleina jest homeomorficzna z podprzestrzenią $u([0,2\pi] \times [0,2\pi])$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, d_e)$, gdzie $u(x,y) = ((2 + \cos y)\cos x, (2 + \cos y)\sin x, \cos\frac{x}{2}\sin y, \sin\frac{x}{2}\sin y)$.

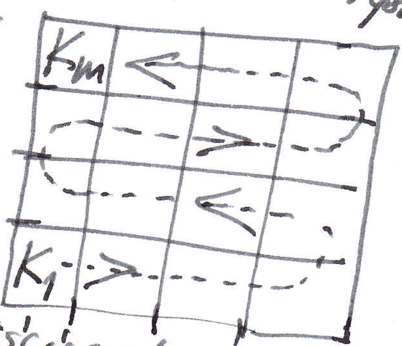
Wskazówka. Zauważyć, że funkcja u utożsamia w kwadracie $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ każdy punkt $(0,t)$ z punktem $(2\pi, 2\pi - t)$, oraz każdy punkt $(t,0)$ z punktem $(t, 2\pi)$, nie utożsamiając innych punktów, zob. Uwaga 5.1.1 (B).

(11) Niech $p: \tilde{X} \to X$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni łukowo spójnej $\tilde{X}$ na przestrzeń topologiczną X takim, że istnieje pokrycie $\mathcal{W} = \{W_s : s \in S\}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi W_s, dla których $p^{-1}(W_s) = U_s \cup V_s$, gdzie U_s i V_s są otwarte w $\tilde{X}$, $U_s \cap V_s = \emptyset$ oraz obcięcia $p|U_s : U_s \to W$, $p|V_s : V_s \to W$ są homeomorfizmami (tzn. $p: \tilde{X} \to X$ jest dwukrotnym nakryciem X).

(A) Pokazać, że jeśli $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \tilde{X}$ są drogami w $\tilde{X}$ takimi, że $p \circ \gamma_0 = p \circ \gamma_1$ i $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, to $\gamma_0 = \gamma_1$.

(B) Pokazać, że dla każdego przekształcenia ciągłego $f: I^2 \to X$ i $a \in \tilde{X}$ takiego, że $p(a) = f(0)$, istnieje dokładnie jedno przekształcenie ciągłe $f: I^2 \to X$ takie, że $p \circ \tilde{f} = f$ oraz $\tilde{f}(0) = a$.

Wskazówka. Podzielić I^2 prostymi równoległymi do osi współrzędnych na kwadraty $K_1, \dots, K_m$ takie, że każdy zbiór $f(K_i)$ leży w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{W}$ i numeracja K_i jest taka, jak na rysunku: Określić kolejno ciągłe $\tilde{f}_i : K_i \to \tilde{X}$ tak, żeby $p \circ \tilde{f}_i = f|K_i$, $\tilde{f}_i|K_i \cap K_j = \tilde{f}_j|K_i \cap K_j$, dla $j < i$ oraz $\tilde{f}_1(0) = a$.



(C) Pokazać, że przestrzeń X jest nieściągalna.

Wskazówka. Rozpatrzyć drogę $\gamma : I \to \tilde{X}$ taką, że $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, $p(\gamma(0)) = p(\gamma(1))$ i wykazać, że pętla $f: S^1 \to X$ określona wzorem $f(E(s)) = p \circ \gamma(s)$, $s \in I$, nie jest homotopijna z pętlą stałą.

12 Pokazać, że ani płaszczyzna rzutowa, ani butelka Kleina nie są ściągalne.

Wskazówka. Pokazać, że przekształcenie ilorazowe $\pi: S^2 \to \mathbb{P}^2$ spełnia warunki zadania 11; określić przekształcenie $p: T \to K$ torusa $T = S^1 \times S^1$ na butelkę Kleina spełniające warunki zad. 11.

13 Niech $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ będą zbiorami liczb całkowitych i wymiernych, odpowiednio, na prostej $\mathbb{R}$. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w $\mathbb{R}$ o klasach abstrakcji $\{\mathbb{Z}\}$ oraz $\{x\}$, dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ i niech $\sim \times id$ będzie relacją równoważności w $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ o klasach abstrakcji $\{\mathbb{Z} \times \{q\}\}$, $q \in \mathbb{Q}$ oraz $\{(x,q)\}$, $(x,q) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}$. Pokazać, że przestrzenie $\mathbb{R}/\sim \times \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}/\sim \times id$ nie są homeomorficzne.

Wskazówka. Założyć, że $h: \mathbb{R}/\sim \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}/\sim \times id$ jest homeomorfizmem i pokazać, że dla pewnego $q \in \mathbb{Q}$, $h([0]_\sim, 0) = [(0,q)]_{\sim \times id}$, a następnie wyprowadzić stąd sprzeczność z ciągłością funkcji h w punkcie $([0]_\sim, 0)$.